Universidade de São Paulo em São Carlos   Lista 2, resolver até 26.2.2016

FCM0114 Eletromagnetismo

Nome:

1. **Matrizes de rotação**

Mostre, que o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e o ângulo α entre os dois vetores ficam preservados, quando giramos os dois vetores por um ângulo θ em torno de um qualquer eixo.

2. **Matrizes de rotação**

Considere a matriz,

$$\mathbf{O} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

a. Mostre, que $\mathbf{O}$ é uma matriz de rotação.
b. Determine o eixo de rotação.
Ajuda: O eixo de rotação $\mathbf{a}$ fica invariável sob rotação: $\mathbf{Oa} = \mathbf{a}$. Use esta condição.
c. Determine o ângulo de rotação.
Ajuda: Considere para isso um vetor que fica perpendicular à $\mathbf{a}$.

3. **Matrizes de rotação**

Uma rotação pelo ângulo ϕ em torno do eixo z é descrito pela matriz de rotação $\mathbf{D}_z(\phi)$ com,

$$\mathbf{D}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a. Mostre por um cálculo explicito que matrizes inversas satisfazem, $\mathbf{D}_z^{-1}(\phi) = \mathbf{D}_z(-\phi) = \mathbf{D}_z^t(\phi)$.
b. Mostre, $\mathbf{D}_z(\phi_1)\mathbf{D}_z(\phi_2) = \mathbf{D}_z(\phi_1 + \phi_2) = \mathbf{D}_z(\phi_2)\mathbf{D}_z(\phi_1)$.
c. Mostre, $(AB)^t = B^t A^t$.

4. **Rotação do sistema de coordenadas**

Aqui queremos girar uma haste em torno de vários eixos e determinar, se a sua orientação final depende do caminho de rotação. Sabemos, que a matriz

$$R^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

descreve a transformação de um vetor sob rotação do sistema de coordenadas por um ângulo α em torno do eixo z.
a. Mostre, que rotações correspondentes em torno do eixo x, resp., do eixo y são dadas por,

$$R^x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad , \quad R^y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

b. Mostre, que uma rotação do sistema de coordenadas em torno do eixo y por um ângulo $\alpha = \pi/2$ leve ao mesmo resultado como uma rotação em torno do eixo z pelo ângulo $\pi/2$ seguido por uma rotação em torno de x pelo ângulo $\pi/2$ seguido por uma rotação em torno de z pelo ângulo $3\pi/2$.

5. **Operadores diferenciais**

Encontro os gradientes dos seguintes campos escalares:
a. $\Phi(\mathbf{r}) = x^2 + y^3 + z^4$,
b. $\Phi(\mathbf{r}) = x^2 y^3 z^4$,
c. $\Phi(\mathbf{r}) = e^x \sin y \ln z$.

6. **Paisagem 2D**

Uma paisagem 2D é parametrizada por $h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$.
a. Onde fica topo da montanha?
b. Qual é a sua altura?

7. **Operadores diferenciais**

Calcule $\nabla_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^n$.

8. **Operadores diferenciais**

Calcule o divergente e o rotacional do campo vetorial $\mathbf{A} = e^{-x^2 y}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{z}{1+y^2}\hat{\mathbf{e}}_y + x\hat{\mathbf{e}}_z$ no ponto $(0, 1, 1)$.

9. **Fontes e vértices**

a. Determine o divergente e o rotacional do campo vetorial $\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y + A_z \hat{\mathbf{e}}_z$ an.
b. Calcule para os seguintes campos as fontes e os vértices:

$$\mathbf{A}_1 = -y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y \quad , \quad \mathbf{A}_2 = +y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y \ ,$$
$$\mathbf{A}_3 = +x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y \quad , \quad \mathbf{A}_4 = +x\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y \ .$$

c. Faz uma ilustração gráfica dos campos e dá uma interpretação geométrica de div e rot.

10. **Fontes e vértices**

Calcule o divergente $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.